

湖水中の¹³⁷Cs 濃度変化における 長期予測モデルの開発

羽田野祐子 Hatano Yuko 末富 英一 Suetomi Eiichi

1. はじめに

赤城大沼は東京電力福島第一原子力発電所(以下, 福島原発)から南西に直線距離で約190kmにある 群馬県赤城山のカルデラ湖である。湖水の平均滞留 時間は2.3年と閉鎖性が高い湖である。2011年3月 11日の東日本大震災に伴う福島原発事故により 2011年8月,ワカサギ中の¹³⁷Cs + ¹³⁴Cs濃度が当 時の暫定食品基準値(500 Bq kg⁻¹)を越えて640 Bq kg⁻¹となった。事故後4年経過し食品の新基準値の 100 Bq kg⁻¹を安定的に下回っている。

測定値が公開されている赤城大沼の湖水の実測期 間は、福島原発事故後5.4年と、日本の閉鎖性湖沼 としては最長のものである。しかし、それ以降は湖 水とワカサギの¹³⁷Cs放射能濃度の測定値は公開さ れていないため、事故後1万日にわたる湖水とワカ サギの¹³⁷Cs放射能濃度の長期的経時変化は明らか にされていない。

筆者らはコンピューターによる数値シミュレー ションに代わり、シンプルな予測式を用いた赤城大 沼の湖水とワカサギの長期予測を試みた。気象予報 のような数値シミュレーションは精緻な予測を日単 位・月単位で行うことができるが、筆者らはもう少 し長い「年単位」の予測を対象としている。筆者ら の予測式は細かい日変動や季節変動を平均化して取 り扱うため、短期の細かい変動は見えないが、大ま かな長期的な傾向が迅速かつ簡便に予測できること に特徴がある。このような予測式により、閉鎖性の 高い湖沼の放射能汚染の長期予測が可能となり、周 辺住民の心理的不安の解消や風評被害の防止に長期 的な展望を与えることが期待できる。本稿では筆者 らの開発した長期予測式と赤城大沼の湖水とワカサ ギの放射能濃度の長期予測への応用について解説す る。

2. 赤城大沼湖水の放射能汚染の特徴

湖水の¹³⁷Cs 放射能濃度C(t)は原発事故後234~ 820日では単一の指数関数 $C(t) = Q_1 \exp(-k_1 t)$ に 従って減少する。820日以降も同一の指数関数に従 い減少するだろうと思われたがその後,放射能濃度 の減少が鈍化し820~2000日は前述の指数関数と比 べて穏やかな指数関数 $C(t) = Q_2 \exp(-k_2 t)$ で減少 することが分かった。

図1に湖水の¹³⁷Cs 放射能濃度の測定値¹⁾を赤丸 で示す。一方,2成分の指数関数的減衰モデル(twocomponent decay function model:TDM)¹⁾:



図1 赤城大沼湖水の¹³⁷Cs 放射能濃度の経時変化

$$C(t) = Q_1 \exp(-k_1 t) + Q_2 \exp(-k_2 t)$$
(1)

で測定値をフィッティングした結果を図1に実線で 示す。この図に示したように赤城大沼では¹³⁷Cs放 射能濃度の減少の割合が時間と共に漸減的に減少す るために将来にわたって放射能濃度を予測しようと すると、測定を行いながら新たな指数関数を追加し ていかなくてはならなくなる。

そこで多成分の指数関数モデルに代わる新たな予 測モデルの開発が必要になってくる。

3. 長期予測の数理モデル

時刻と共に減少の割合が漸減的に減少していく関数として Mittag-Leffler 関数が知られている^{2,3)}。本研究ではこの性質を利用するため、Mittag-Leffler 関数を解として持つ方程式を¹³⁷Cs 放射能濃度の予測 モデルとして使用することとした⁴⁾。このような方程式として時間に関するフラクショナルな拡散方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}C(x,t) = K_{\alpha \ 0}D_t^{1-\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x^2}C(x,t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

がある⁵⁾。ここでxは¹³⁷Cs 粒子の位置,tは時刻, K_{α} は一般化された拡散係数である。(2)式の非整数階 微分の演算子 $_{0}D_{t}^{1-\alpha}$ は便宜上右辺に来ているが時間 に対する非整数階(α 階)の微分を表している。非 整数階微分とは通常の微分が1階あるいは2階と いった整数階であるのに対して例えば0.6 階のよう に非整数階となる微分を指す。非整数階微分には種々 の数学的定義があるが,ここでは主に理論解析に用 いられることが多い, Riemann-Liouvilleの定義⁶:

$${}_{0}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{f\left(t^{'}\right)}{\left(t-t^{'}\right)^{\alpha}}dt^{'} \qquad (3)$$

を採用している。

変数分離法を用いて(2)式を空間と時間に分離し, 空間については湖の深さ方向について平均化し定数 を得ることにする。その結果,湖水中の平均化され た¹³⁷Cs 放射能濃度の時間に関する方程式が残るの でこの式の解は Mittag-Leffler 関数*E*_α(z):

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$
(4)

を用いて次式のように書ける4)。

$$C(t) = A \times E_{\alpha} \left(-\xi \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\alpha} \right) \exp(-\lambda_d t)$$
(5)

ここで λ_a は¹³⁷Csの崩壊定数である。定数 A, α , ξ , τ はフィッティングパラメータであり, これまでに計測された湖水の¹³⁷Cs放射能濃度に(5) 式をフィッティングして得られる値である。このようにして得られたフィッティングパラメータを(5) 式に代入することにより¹³⁷Cs放射能濃度の長期予 測を行う。このようなモデルを fractional diffusion model (FDM) と呼ぶ^{7,8)}。

4. 湖水の実測データの再現と長期予測

図2に2011年3月15日から234~1981日までの 測定値に(5)式をフィッティングした結果を示す。 この図から測定値とフィッティング結果の一致は よく,(5)式が実測値を再現できることが確認でき た。しかし,測定値の長期の予測には可能なのだろ うか,との疑問が生じる。そこで,福島原発事故よ りも事故からの経過日数の長いチェルノブイリ事故 で汚染された Svyatoe 湖の測定値⁹⁾に本研究の結果 を適用してどの程度再現できるかを確認することに した。ただし,Svyatoe 湖と赤城大沼では初期の汚 染のレベルが異なるのでここでは¹³⁷Cs 放射能濃度





の減少の割合を確認することを目的とすることと し,(5)式のパラメータAだけは Svyatoe 湖の放射 能濃度にフィッティングした。図3にチェルノブイ リ事故後2400~4900日の Svyatoe 湖水の放射能濃 度(赤丸)と本研究の予測値(実線)を両対数表示 で比較した。

事故からの経過日数が赤城大沼と比べて約2.5 倍 長い Svyatoe 湖では¹³⁷Cs 放射能濃度の測定値は両 対数表示で見ると直線的に減少していることが特徴 であるが,予測結果も同様の減少を再現できている ことが示された。

次に(5)式を赤城大沼湖水の¹³⁷Cs 放射能濃度 測定値にフィッティングした結果を用いて 2011 年 3月15日から1万日後までの長期予測を行った。 その結果を図4に示す。放射能濃度の変化が分かり やすいように図は両対数で表示している。この図で 赤丸が実測値¹⁾,実線が本モデル(FDM),破線が 2成分の指数関数的減衰モデル(TDM)である。



図 3 チェルノブイリ事故後の Svyatoe 湖の¹³⁷Cs 放射能濃 度の経時変化(赤丸は測定値⁹⁾,実線は本研究の予測値を示 す)



図4 1万日先の湖水の¹³⁷Cs 放射能濃度の予測

図4から FDM による予測では 300 日を過ぎたあ たりから放射能濃度の減少が両対数表示で直線的に なっていることが分かる。これに対して TDM では 4000 日を過ぎたあたりから放射能濃度の減少が FDM の予測モデルの減少に比べて急激になってい る。つまり、本予測モデルでは長期的に見ると放射 能濃度が時間のべき乗 $t^{-\alpha}$ (α は非整数階微分の階 数)に比例して減少することを意味し、その結果従 来のモデルである TDM よりも放射能濃度の減少が 遅くなり、尾を引くように減少していくことが予測 される。放射能濃度の予測値が時間のべき乗 $t^{-\alpha}$ に 比例して減少するという事実は(5)式中の Mittag-Leffler 関数が、変数(時刻 t)が十分大きくなると $t^{-\alpha}$ で近似できるという事実に基づいている¹⁰。

5. ワカサギの放射能濃度の長期予測

福島原発事故直後赤城大沼での汚染が問題となっ たのはこの湖に生息するワカサギから当時の食品規 制値を超える放射能が検出されたためであった。そ こで,湖水とワカサギのそれぞれの放射能濃度の相 関係数を算出したところ 0.95 という強い相関を得 た(図5参照)。

そこで湖水の長期予測に用いた本モデルがワカサ ギの放射能濃度の長期予測にも適用できるのではな いかと考えた。そこで原発事故後160~2050日まで



図5 赤城大沼湖水とワカサギの放射能濃度の相関



図 6 1万日先のワカサギの¹³⁷Cs 放射能濃度の予測

のワカサギの¹³⁷Cs 放射能濃度(Bq kg⁻¹ wet weight) の測定値に(5)式をフィッティングした結果得ら れたパラメータを用いて2011年3月15日から1万 日先までの予測を行った。その結果を図6に示す。 図中の赤丸はワカサギの放射能濃度測定値¹⁾,実線 と破線はそれぞれ FDM と TDM による予測を表す。

実測データへのフィッティングは FDM と TDM では遜色なく良く一致していると言える。一方, 4000 日以降 1 万日までの長期予測では FDM を用い た場合,時刻 t のべき乗で放射能濃度が減少してい くのに対して,TDM の予測値では FDM より放射 能濃度の減少が急峻になっている。事故後 4 年が経 過した時点で食品基準値である 100 Bq kg⁻¹を安定 的に下回っているとはいえ,FDM の予測値の方が より安全側に評価していると言える。

6. おわりに

赤城大沼における¹³⁷Cs 放射能濃度の緩やかな減 少を再現するために, FDM に基づく非整数階拡散 方程式の解として Mittag-Leffler 関数を導出した。 この関数は、時間 t が小さいときは指数関数、時間 t が大きくなるとt^{-a}のべき乗則に従うため放射能 濃度が時刻と共に尾を引くようなロングテール分布 となる性質を持つ。FDM に基づく式 (Mittag-Leffler 関数)を用いることで、2 成分以上の指数関数から なる式を用いることなく、湖水中の¹³⁷Cs 放射能濃 度の測定値の時間変化をフィットさせることができ た。事故後 2000 日以降は測定結果の公表が行われ ていないため、予測式を用いて大沼湖畔の周辺住民 に今後の放射能汚染の見通しを伝えることは理にか なっている。一方、放射性 Cs のモニタリングの結 果を用いた予測式の検証は、今後も継続すべき研究 課題である。

参考文献

- Suzuki, K., et al., Sci. Total Environ., 622-623, 1153-1164 (2018)
- Gorenflo, R., et al., Fract. Calculus Appl. Anal., 5, 491-518 (2002)
- 3) Gorenflo, R., et al., Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications (2014)
- 4) Suetomi, E., et al., Sci. Rep., 11, 20336 (2021)
- 5) Metzler, R., et al., Phys. Rep., 339, 1-77 (2000)
- 6) Oldham, K. B., et al., The Fractional Calculus (1974)
- Evangelista, L. R., et al., Fractional Diffusion Equations and Anomalous Diffusion (2018)
- 8) Sandev, T., et al., Fractional Equations and Models Theory and Applications (2019)
- Bulgakov, A. A., et al., J. Environ. Radioactivity, 61, 41-53 (2002)
- Mainardi, F., Discr. Continuous Dyn. Syst. Series, B19, 2267-2278 (2014)

(筑波大学)