



正割積分と指数積分の計算

深野 重男

Fukano Shigeo

形状の長い線源が収納されている血液照射装置などの容器表面の線量計算には、正割積分を使用して線量を求めることになる。この正割積分は簡単に求めることができないので、従来は文献にある数値表やグラフを利用して計算をしていた。今回、パソコンの表計算ソフトとインターネットを利用し、正割積分の計算が簡単にできるようになったので紹介する。

長さ $2l$ の線源、遮蔽体の厚さ b 、 P 点における線量計算の場合を示す (図1)。

棒状線源の正割積分の式は

$$F(\theta, b) = \int_0^\theta e^{-b \sec \theta'} d\theta' \quad (1)$$

で表され、線減弱係数を μ とすると $b = x\mu$ である。この数値表は文献1)にあり、角度は $0^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ で、 b は $0 \sim 10$ まで有効数字小数点6桁で表されている。表1にその一部分を示す。 $b=10$ では

0.000008 と、有効数字が1桁の8になっている。

文献2)等には数値表ではなくグラフがあり、その一例を図2に示す。角度は $1^\circ, 3^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ で b は32まで示されているが、グラフから読みとれる有効数字は2桁、若しくは3桁までである。例えば、図2の $\theta=10^\circ$ の $b=4$ では3.2と読める。現在では、グラフは数値表の補助として利用さ

表1 角度 10° の正割積分値¹⁾

$b \backslash \theta$	10°	$b \backslash \theta$	10°
0.0	0.174533	2.6	0.012793
0.1	0.157843	2.8	0.010463
0.2	0.142749	3.0	0.008558
0.3	0.129099	3.5	0.005178
0.4	0.116754	4.0	0.003132
0.5	0.105589	4.5	0.001895
0.6	0.095492	5.0	0.001147
0.7	0.086361	5.5	0.000694
0.8	0.078103	6.0	0.000420
0.9	0.070634	6.5	0.000254
1.0	0.063880	7.0	0.000154
1.2	0.052247	7.5	0.000093
1.4	0.042733	8.0	0.000056
1.6	0.034951	8.5	0.000034
1.8	0.028587	9.0	0.000021
2.0	0.023381	9.5	0.000012
2.2	0.019123	10.0	0.000008
2.4	0.015641		

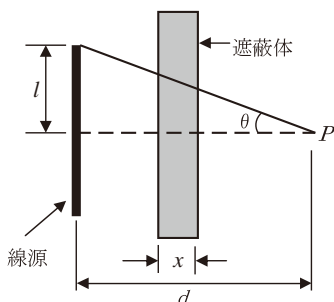


図1 棒状の線源の遮蔽

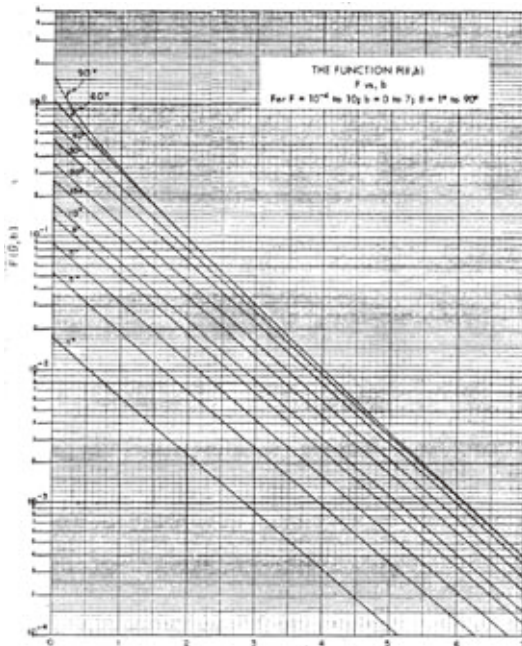


図2 関数 $F(\theta, b)$

れ、数値データが主流であり、数値にない点はパソコン等により補間して求める。この場合の数値は、表1のような小数点以下の桁ではなく、有効数字の桁で表すことによって、計算において常に同じ有効桁数を得ることができる。そこで、有効桁数6桁の数値を求めることとした。

正割積分の(1)式及び図1からも分かるように、線源を細かく分割し各々について計算し、その総和を得れば積分値は求められるので、式の $\sec\theta$ を分割し、 $e^{-b\sec\theta}$ を求め、その和を求めればよい。これらは、パソコンを利用すれば容易にできるので、表計算ソフト Excel の VBA を使用し計算を行った。試みに分割数は表1の数値になるまで繰り返し行った。 $b=0$ は(1)式から分かる通り分割を必要としない。これ以外は b と角度が大きくなるに従い、分割数も大きくなる。今回行った計算では 90° だと、分割数の最大値は 20×10^6 であった。分割数が多いと思われるかもしれないが、現在のパ

表2 角度 10° の Excel による正割積分値

b	θ	10°	b	θ	10°
0.0		1.7453293×10^{-1}	2.6		1.2792806×10^{-2}
0.1		1.5784317×10^{-1}	2.8		1.0463271×10^{-2}
0.2		1.4274940×10^{-1}	3.0		8.5579448×10^{-3}
0.3		1.2909900×10^{-1}	3.5		5.1775717×10^{-3}
0.4		1.1675395×10^{-1}	4.0		3.1324564×10^{-3}
0.5		1.0558941×10^{-1}	4.5		1.8951614×10^{-3}
0.6		9.5492491×10^{-2}	5.0		1.1465939×10^{-3}
0.7		8.6361104×10^{-2}	5.5		6.9370577×10^{-4}
0.8		7.8102915×10^{-2}	6.0		4.1970412×10^{-4}
0.9		7.0634420×10^{-2}	6.5		2.5392965×10^{-4}
1.0		6.3880105×10^{-2}	7.0		1.5363347×10^{-4}
1.2		5.2247362×10^{-2}	7.5		9.2952375×10^{-5}
1.4		4.2733010×10^{-2}	8.0		5.6238974×10^{-5}
1.6		3.4951270×10^{-2}	8.5		3.4026440×10^{-5}
1.8		2.8586619×10^{-2}	9.0		2.0587228×10^{-5}
2.0		2.3380996×10^{-2}	9.5		1.2456082×10^{-5}
2.2		1.9123332×10^{-2}	10.0		7.5364577×10^{-6}
2.4		1.5641000×10^{-2}			

ソコンでは計算時間も掛からず問題はない。VBAには、 \sec 関数がないので \cos 関数の逆数を用いた。角度 10° の計算結果を表2に示す。

次いで、広がりのある線源の計算に用いられる指数積分について、検討した。図3に円盤状の線源のP点における線量計算の体系を示す。

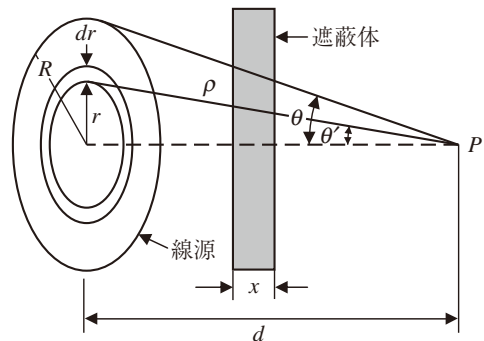


図3 面状の線源の遮蔽

放射能 S , $\rho^2 = d^2 + r^2$, $\rho d\rho = r dr$, $\sec\theta' = \frac{\rho}{d}$,

$b = x\mu$ における P 点での線束は

$$d\phi = \frac{S(2\pi r dr)}{4\pi\rho^2} e^{-b \sec\theta'} \quad (2)$$

となり, $t = b\rho/d$ とすると

$$\phi = \frac{S}{2} \int_b^{-b \sec\theta'} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (3)$$

となる。したがって, 積分の部分は以下の式となる。

$$E_1(b) = \int_b^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (4)$$

(4) 式の数値は, 文献3)と文献4)にある。文献3)の表の一例を表3に示す。表3のように有効数字18桁で括弧の中の数字は指数の桁を表している。

文献4)では, 有効数字16桁である。両方の数表を使用すると, b の値として0.2~80までが求められる。このグラフも文献2)にある。指数積分については, 近似式⁵⁾がありこれを利用することもできるが, 欠点は b の範囲により近似式を変える必要があるため, 計算が煩雑になる。また, この指数積分は, 平板線源の場合には次の式となる。

$$E_2(b) = \int_b^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \quad (5)$$

この積分を部分積分により求めると

$$E_2(b) = \int_b^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-b}}{b} - 2 \int_b^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt \quad (6)$$

となり, 分母の t の指数部分が $2 \cdot 3 \cdot 4$ と1つずつ増えるだけで, その形は変わらず, 近似式を用いることになるが, この式は, インターネットのサイトに生活や実務に役立つ計算サイトとしてKeisanがありこれを利用すると, (6)式の定積分が求められる。Keisanのホームページのアドレスは, <http://keisan.casio.jp/>である。

表3 指数積分の数値の一例 (文献3)による)

b	$-Ei(-b)$
1.0	0.21938 39343 95520 274 (0)
2.0	0.48900 51070 80611 196 (-1)

この中の“専門的な計算 → 特殊関数 → 積分関数 → 指数積分 $Ei(b)$ ”には指数積分 $Ei(b)$ の数値とグラフがあり, 有効桁数が50桁までの計算ができる。指数積分を無料で簡単に求められることにより, パソコンとインターネットで容易に遮蔽計算ができるようになった。

参考文献

- 1) Abramowitz, M., Stegun, I.A., Eds. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards (1964); URL http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf
- 2) Rockwell, T., Reactor Shielding Design Manual, United States Atomic Energy Commission (1956); URL <http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/4360248-Cr40J8/>
- 3) Harris, F.E., Tables of the Exponential Integral $Ei(x)$, American Mathematical Society, **11**(57), 9-16 (1957); URL <http://www.ams.org/journals/mcom/1957-11-057/S0025-5718-1957-0088069-0/S0025-5718-1957-0088069-0.pdf>
- 4) Miller, J., Hurst, R.P., Simplified Calculation of the Exponential Integral, American Mathematical Society, **12**(63), 187-193 (1958); URL <http://www.ams.org/journals/mcom/1957-11-057/S0025-5718-1957-0084855-1/S0025-5718-1957-0084855-1.pdf>
- 5) Price, B.T., Horton, C.C., Spinney, K.T., RADIATION SHIELDING in The International Series of Monographs on Nuclear Energy, Pergamon Press (1957)

【インターネットアドレスは2013年7月現在】

(日本アイソトープ協会)